ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2018, № 3

УДК 519.14

Н.К. Тимофієва
Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України, Україна
пр. Глушкова, 40, м. Київ, 03187

ПРО КОМБІНАТОРНІ ЧИСЛА ТА СИМЕТРІЮ В БІОЛОГІЇ

N.K. Tymofijeva
International Scientific and Training Center for Information Technologies and Systems of NAS and MES of Ukraine, Ukraine
40, Hlushkov ave, Kyiv, 03187

ABOUT THE COMBINATORIAL NUMBERS AND SYMMETRIES IN BIOLOGY

У живій та неживій природі існують явища, пов'язані з комбінаторними числами. Це говорить про те, що природі властиві закони комбінаторики. У комбінаторних множинах різних типів, у процесі їхнього впорядкування, утворюються симетрії різних видів, які характерні і для знакових комбінаторних просторів. Оскільки аксіоми цих просторів справедливі для деяких природних, зокрема біологічних форм, то, досліджуючи їх в комбінаторниці, можна пояснити, як утворюється симетрія біологічних форм.

Ключові слова: комбінаторика, комбінаторні конфігурації, знакові комбінаторні простори, симетрія комбінаторних множин, симетрія в біології, комбінаторні числа

In living and inanimate nature there are phenomenon associated with combinatorial numbers. This suggests that the laws of combinatorics are inherent in nature. In combinatorial sets of different types in the process of their ordering symmetries of different species are formed, which are also characteristic for sign combinatorial spaces. Since the axioms of these spaces are valid for some natural, in particular biological ones, then exploring it in combinatorics can explain how the symmetry of biological forms is formed.

Keywords: combinatorics, combinatorial configurations, sign combinatorial spaces, symmetry of combinatorial sets, symmetry in biology, combinatorial numbers

Вступ

У статті показано, яким чином при розгортанні знакового біологічного простору із згорнутого (елементів ДНК) утворюються комбінаторні числа та симетрії в біології (розгорнутого біологічного простору) [1]. Знакові комбінаторні простори дозволяють пояснити і утворення фрактальних структур як в комбінаториці, так і у живій природі.

Постановка проблеми

Як у живій, так і у неживій природі має місце симетрія, яка досліджується різними підходами. Оскільки в біології присутні комбінаторні числа, то в статті проводиться дослідження симетрії з використанням комбінаторики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У літературі описано багато способів дослідження симетрії в біології. З цією метою використовують геометричний (зокрема в біології) та алгебраїчний підходи (теорія груп, статистичний аналіз, моделі Маркова) [2–5]. У [2] досліджується симетрія розгорнутого біологічного простору з використанням геометрії, а в [3-5] – біологічного згорнутого (ДНК) з використанням алгебраїчних підходів. Але на запитання, яким чином виникає симетрія у розгорнутих біологічних просторах, відповіді ще не знайдено.

Мета дослідження

З використанням знакових комбінаторних просторів проводиться спроба пояснити утворення комбінаторних чисел та симетрії в біології.

Математична модель симетрії комбінаторних множин

Симетрія, передусім, геометричне поняття, але вона вивчається і в інших розділах математики та інших науках. Залежно від типу перетворень розрізняють різні її види. У теорії груп, залежно від перетворень, виділяють такі види симетрії: перенос, відображення, поворот, ковз-

ну, гвинтову симетрії, обертання тощо [6, 7]. Симетрії характеризуються розміром, а число елементів групи називають порядком групи. Вони можуть бути точними або наближеними. Найпростіші їхні види – дзеркальна та осьова. Але це лише частковий випадок. Деякі симетрії ще не досліджено та не описано. Строге її означення навести також досить складно.

Найбільш простий вид симетрії – дзеркальний, який ґрунтується на рівності двох частин певного об'єкта. Уявна площина, яка ділить такий об'єкт навпіл, називається площиною симетрії. У комбінаториці також наявна симетрія як точна, так і наближена, зокрема вона властива комбінаторним множинам.

Симетрію комбінаторних множин, упорядкованими за певними правилами, змоделюємо скінченною послідовністю чисел, значення яких збільшуються до найбільшого з них, а потім зменшуються (або зменшуються до найменшого, а потім збільшуються). Площина симетрії, яка проходить через найбільше (або найменше) число послідовності, ділить її на дві частини, значення яких від центру рівномірно зменшуються (або збільшуються), але ці частини необов'язково дзеркально симетричні. Дослідження комбінаторних множин показує що вони характеризуються як наближеною, так і точною симетрією. При точній симетрії уявна площина ділить послідовність чисел по найбільшому (або найменшому) чи проходить між двома найбільшими (або найменшими) числами. Дві розділені частини – дзеркально симетричні. При аналізі комбінаторних множин, які впорядковані за іншими правилами, можна виявити інші симетрії.

Визначення 1. Під симетрією комбінаторної множини розуміємо таку її структуру, при якій числові значення кількості комбінаторних конфігурацій підмножин, якими впорядкована ця множина, утворюють скінченну послідовність чисел, яка характеризується точною або наближеною симетрією.

Комбінаторні конфігурації

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A=\{a_1,...,a_n\}$ [8]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k=(w_1^k,...,w_\eta^k)$, де $\eta\in\{1,...,n\}$ – кількість елементів у w^k (у подальшому η позначатимемо і як η^k), $W=\{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k\in\{1,...,q\}$) у w^k – порядковий номер w^k у W, q – кількість w^k у W. Комбінаторну конфігурацію позначатимемо як з верхнім індексом w^k, так і без індексу w.

Рекурентним комбінаторним оператором назвемо сукупність правил, за якими з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k. Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція та арифметичний [8, 9].

Наведемо деякі найпростіші відомі комбінаторні конфігурації, які можуть бути точками розгорнутих біологічних просторів. Позначатимемо їх як w або символами, уведеними в літературу з комбінаторики [10–12].

Дві комбінаторні конфігурації w^k і w^i назвемо нетотожними, якщо кількість елементів у них або однакова, або різна, і вони відрізняються хоча б одним елементом або їхнім порядком у w^k і w^i $k\neq i$.

Вибірки. З поняттям вибірки пов'язують як саму операцію виділення підмножин заданої множини, так і її результат: вибрану підмножину. У подальшому маємо на увазі друге поняття. Нехай задано базову множину $A=\{a_1,...,a_n\}$. З неї одержимо η-вибірку. Число η називають об'ємом вибірки. У η-вибірках, залежно від умови задачі, або враховується порядок розташування в них елементів (η-розміщення), або не враховується. У цьо-

му випадку вони називаються η-сполученнями. Оскільки потужність множини неупорядкованих вибірок без повторень дорівнює $2^n - 1$, то її порівнюють з бінарними послідовностями.

Отже, існують такі типи вибірок: упорядковані та неупорядковані. Неупорядковані – це сполучення без повторень і з повтореннями. Упорядковані – це розміщення з повтореннями та без повторень.

Оскільки будь-яка вибірка утворюється вибиранням певних елементів із базової множини $A = \{a_1, ..., a_n\}$, то цю операцію назвемо операцією вибирання.

Сполучення як з повтореннями так і без повторень утворюються єдиною операцією – вибиранням.

Перестановки. Цю комбінаторну конфігурацію досліджено досить ґрунтовно. Їх ще називають упорядкованими вибірками з n елементів базової множини A по n, бієкцією множини A на A, функцією. У подальшому користуємося терміном перестановка. Нехай задано скінченну базову множину $A = (a_1, ..., a_n)$, яка складається з n елементів будь-якої природи. Перенумеруємо їх від 1 до n і вважатимемо, що елементами A виступають саме ці числа. Назвемо перестановкою будь-яке розміщення чисел $1, 2, ..., n$ у деякому порядку. Якщо в заданій перестановці поміняти місцями будь-які елементи (не обов'язково розміщені поряд), а всі інші залишимо на місці, то одержимо нову перестановку. Операцію, яка змінює порядок елементів у перестановці, називають транспозицією. Від будь-якої перестановки з n елементів можна перейти до будь-якої іншої з тих же символів за допомогою як однієї, так і кількох транспозицій.

*Розбиття натурального числа***.** Розбиттям цілого додатного числа називається подання n у вигляді суми цілих додатних чисел $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\eta$, $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1, \eta}$, $\eta \in \{1, ..., n\}$.

Розділяють упорядковані (композиції) та неупорядковані розбиття числа. В упорядкованихураховуються розбиття з однаковою кількістю і однаковим значенням їхніх компонент, які відрізняються одна від одної лише порядком.

Будь-яке неупорядковане розбиття w числа n утворюється з попереднього w^* відніманням від w_j^* значення x і додаванням цього значення x до w_l^*, $j \neq l$, $w^* = (w_1^*, ..., w_j^*, ..., w_l^*, ..., w_\eta^*)$. Операцію, за допомогою якої утворюється розбиття числа, назвемо додавання-віднімання або арифметичною.

Розбиття натурального числа утворюються однією операцією – арифметичною.

Розбиття n-елементної множини A на підмножини. Розбиттям n-елементної множини A на η підмножин (блоків) назвемо множину підмножин $\rho = (\rho_1, ..., \rho_\eta)$ таку, що $\rho_1 \bigcup ... \bigcup \rho_\eta = A$, $\rho_j \bigcap \rho_l = \varnothing$, $j \neq l$, $\rho_j \neq \varnothing$, $j, l \in \{1, ..., \eta\}$. Непуста підмножина $\rho_j = \{a_1, ..., a_{\xi_j}\}$, $a_s \in A$, $s \in \{1, ..., n\}$ може мати від 1 до n елементів ($\xi_j \in \{1, ..., n\}$). Кількість підмножин ρ_j у розбитті ρ також може бути від 1 до n ($\eta \in \{1, ..., n\}$).

Розбиття ρ у множині W утворюється двома рекурентними комбінаторними операторами: або арифметичним або транспозицією. Залежно від постановки задачі воно може бути як з повтореннями, так і без повторень, а їхня множина як скінченною, так і нескінченною.

Нескладно помітити, що при генеруванні множини W у деяких ρ елементи змінюють порядок їхнього слідування, тобто для їхнього утворення необхідно, крім арифметичного рекурентного комбінаторного оператора, використовувати і транспозицію.

Визначення 2. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, ..., w_{\eta^k}^k)$ та $w^i = (w_1^i, ..., w_{\eta^i}^i)$ назвемо *ізоморфними*, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Означення 3. Підмножину $W_{\eta^k} \subset W$ назвемо підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій, якщо її елементи – ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Множина W складається з підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Якщо комбінаторні конфігурації множини W утворені кількома рекурентними комбінаторними операторами, то вони можуть бути як ізоморфними, так і неізоморфними, а W складається з підмножин $W_\eta \subset W$.

Оскільки операція транспозиції у перестановці змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Симетрія комбінаторних конфігурацій

Комбінаторну конфігурацію подамо упорядкованою послідовністю, для якої існує їй симетрична. Вважатимемо, що w^k симетрична, якщо вона збігається сама з собою при русі без деформацій. Існує єдиний спосіб перемістити симетричну послідовність так, щоб вона збіглася з початковою. Це – її поворот на 180^0. Уведемо таке означення.

Означення 4. Інверсією комбінаторної конфігурації $w = (w_1,...,w_\eta)$ назвемо $\tilde{w} = (\tilde{w}_\eta,...,\tilde{w}_1)$, тобто $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$ симетричні одна відносно другої.

Для перестановки $w = (1, 2, ..., n-1, n)$ симетричною є $\tilde{w} = (n, n-1, ..., 2, 1)$.

Лема 1. Симетричні перестановки $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$ належать одній множині W.

Доведення очевидне.

Лема 2. Якщо множина W упорядкована підмножинами ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η, то попарно симетричні $w \in W$, як правило, належать різним множинам, які мають різне впорядкування. Тобто для $w \in W$ симетрична $\tilde{w} \in \tilde{W}$, де W та $\tilde{W}$ мають різне впорядкування.

Доведення очевидне.

Приклад. Для підмножини $W_\eta \subset W$ неупорядкованого розбиття натурального числа $W_\eta = (1, 5;\ 2, 4;\ 3, 3)$ симетричною є підмножина $\tilde{W}_\eta = (3, 3;\ 4, 2;\ 5, 1)$, яка належить множині $\tilde{W}$.

Комбінаторні числа та фрактальні властивості комбінаторних множин

Множини комбінаторних конфігурацій можуть бути упорядковані або за строгими правилами або хаотично. Генерування комбінаторних конфігурацій включає:

а) правила утворення комбінаторних конфігурацій, тобто визначаються рекурентні комбінаторні оператори;

б) правила упорядкування комбінаторних конфігурацій.

Ці правила визначаються на основі аналізу структури певної множини. Існує скінченне число множин W, упорядкованих за визначеними правилами. Значна їхня частина – структурована. У них спостерігається симетрія. Вони характеризуються різними її видами як точними, так і наближеними. Такі комбінаторні множини впорядковуються рекурентно-періодичним методом, що ґрунтується на властивості періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення комбінаторних конфігурацій w та полягає в упорядкованні цих множин інтервалами, в кожному з яких w утворюються за одними і тими ж правилами [8, 9]. Для генерування комбінаторних множин з урахуванням властивості періодичності необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються:

- інтервал нульового рангу;
- обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу);
- інтервал σ-го рангу.

Підрахування кількості комбінаторних конфігурацій в упорядкованих за розробленими правилами підмножинах множини W проводиться досить просто за методом, описаним у [8].

Якщо проаналізувати певне впорядкування комбінаторних множин з використанням властивості періодичності, то

можна побачити, що вони мають фрактальну структуру. Вважаємо, що комбінаторні множини *самоподібні*, якщо їхні елементи утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхнє впорядкування проводиться за одними і тими ж правилами.

Згідно з властивістю само подібності, інтервал σ-го рангу упорядкованої множини W складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу. Оскільки число n може набувати довільних значень, то W для фіксованого n – скінченна, а для довільного – нескінченна. Підмножина W_η розміщень з повтореннями (або сполучень з повтореннями, розбиття n-елементної множини на підмножини з повтореннями) – скінченна, а множина W цих же комбінаторних конфігурацій для того ж самого n – нескінченна. Тобто, комбінаторні множини одночасно – скінченні та нескінченні. Такі властивості характерні для фракталів, тому останні мають фрактальну структуру.

Оскільки інтервал σ-го рангу складається з інтервалів $(\sigma-1)$-го рангу, а інтервал 1-го рангу – з інтервалів нульового рангу, нескладно, знаючи правила їхнього впорядкування, визначати кількість комбінаторних конфігурацій у їхній множині. За певними правилами, які різні для різних типів комбінаторних конфігурацій, утворюємо скінченну послідовність, кожне значення якої задає кількість w в інтервалах σ-го рангу. Формулу комбінаторного числа (кількість w у множині W) подамо σ-значною сумою

$$\sum_{j_\sigma=1}^{H_\sigma}\Big(\sum_{j_{\sigma-1}=1}^{H_{\sigma-1}}\big(\ldots\big(\sum_{j_2=1}^{H_2}\big(\sum_{j_1=1}^{H_1}(h)\big)\big)\ldots\big)\Big), \qquad (1)$$

де H_t – кількість інтервалів σ-го рангу, $t\in\{1,\ldots,\sigma\}$, $\sigma\in\{2,\ldots,n\}$, h – кількість комбінаторних конфігурацій в інтервалі нульового рангу. Вираз (1) підтверджує фрактальну структуру комбінаторних множин. Інтервали першого рангу містять інтервали нульового рангу, інтервали другого рангу відповідно містять інтервали першого і т.д. Тобто, комбінаторна множина містить зменшені копії найбільшого фрактала n-го рангу.

Симетрія комбінаторних множин

Скінченна послідовність числових значень кількості комбінаторних конфігурацій у підмножинах, якими впорядковані W, визначає наближену або точну симетрію комбінаторної множини певного типу.

*Симетрія множини перестановок***.** Як відомо, кількість різних упорядкувань множин перестановок дорівнює $(n!)!$.

Дві перестановки w та w^* назвемо нетотожними, якщо вони відрізняються порядком слідування в них елементів. Оскільки попарно симетричних перестановок у їхній множині міститься $n!/2$, то упорядкуємо W попарно симетричними w і w^* так, що перша w та $\mathrm{n}\,!$ – симетричні, друга та $\mathrm{n}\,!\text{-}1$ – також симетричні і т.д. Якщо підмножину перестановок $\xi+1,\ldots,n!$, де $\xi=n/2$, якщо n парне, і $\xi=(n+1)!/2$, як-що n непарне, перемістити поворотом на 180^0, то вона збіжиться з першою $1,\ldots,\xi$. Тобто, описане впорядкування множини перестановок характеризується симетрією.

Згенеруємо множину перестановок W рекурентно-періодичним методом з урахуванням властивості періодичності так, що наступна перестановка утворюється з попередньої однією транспозицією за правилами, описаними у [8].

Проаналізувавши утворену за описаними у [8] правилами множину W, можна побачити, що обмежувальні перестановки для l-го інтервалу $(n+1)$-го рангу, $l\in\{\xi+2,\ldots,n\}$ утворюються точно так, як і для t-го інтервалу $(n+1)$-го рангу, $t\in\{1,\ldots,\xi\}$, тобто по відношенню до середнього інтервалу $\xi+1$ в упорядкованій підмножині обмежувальних перестановок $W^*\subset W$ має місце дзеркальна симетрія.

Розглянемо розташування тотожних маршрутів у їхній множині H для задачі

комівояжера [13]. Нагадаємо, що гамільтоновим циклом називають шлях у зв'язному графі, який починається в заданій вершині, проходить через усі вершини один раз і повертається в початкову. Під маршрутом розуміємо послідовність дуг між вершинами, через які проходить гамільтоновий цикл. Задача комівояжера полягає в наступному: задано деяку кількість міст, відстань між якими відома. Необхідно знайти найкоротший шлях, який є гамільтоновим циклом. Як відомо, множина H містить тотожні та нетотожні маршрути. Кількість нетотожних маршрутів у ній дорівнює $(n-1)!/2$.

Якщо проаналізувати розподілення тотожних маршрутів в упорядкованій за правилами, описаними у [8], множині H, то можна побачити, що вони розміщені симетрично. Для $n=4$ кількість нетотожних маршрутів дорівнює трьом. Відповідно підмножин, які містять тотожні маршрути, також три. Кожна підмножина містить вісім тотожних маршрутів. Аналогічно для $n=5$ кількість нетотожних маршрутів, відповідно і підмножин, дорівнює дванадцяти. Кожна підмножина містить десять тотожних маршрутів. Для кожного із маршрутів k-ї підмножини множини H обчислимо інтервал – кількість маршрутів, розміщених між тотожними, включаючи перший і останній. Якщо побудувати графік їхнього розподілення, то для $n=4$ тотожні маршрути першої та третьої підмножин розміщені в множині H з інтервалами симетрично відносно її середини. Тобто, маємо осьову симетрію. Для $n=5$ тотожні маршрути розподілені таким способом: підмножини друга та четверта, сьома та одинадцята, перша та п'ята, восьма та десята розміщені у множині H одна відносно одної дзеркально симетрично. Маршрути підмножин третьої та дванадцятої, шостої та дев'ятої розміщені з інтервалами симетрично відносно середини множини H.

З викладеного випливає, що симетрія у множині перестановок проявляється залежно від способу впорядкування у ній симетричних одна відносно одної $w \in W$ та $\tilde{w} \in W$. Симетрія у ній моделюється скінченними послідовностями, значенням яких є кількість перестановок у певному інтервалі.

Симетрія комбінаторних множин, які упорядковані підмножинами ізоморфних комбінаторних конфігурацій

Упорядкуємо множину W підмножинами W_η, починаючи з $\eta=1$ та закінчуючи $\eta=n$ рекурентно-періодичним методом за певними правилами. Знаючи правила впорядкування комбінаторних конфігурацій в $W_\eta \subset W$, визначимо кількість w у $W_\eta \subset W$ та побудуємо з цих чисел упорядковану скінченну послідовність. Для різних типів комбінаторних конфігурацій ці послідовності характеризуються як наближеною, так і точною симетрією. Для сполучень без повторень для різних значень n ці послідовності утворюють арифметичний трикутник і характеризуються точною симетрією. Для розбиття натурального числа або n-елементної множини на підмножини утворені скінченні послідовності характеризуються наближеною симетрією.

Приклад. Уявімо, що $n=7$. У підмножинах $W_\eta \subset W$ знайдемо кількість комбінаторних конфігурацій, з числових значень яких побудуємо скінченну послідовність. Для сполучень без повторень вона набуває вигляду: 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1. Уявна площина в ній проходить між числами 35, 35. Отримуємо точну симетрію. Для розбиття натурального числа маємо: 1, 3, 4, 3, 2, 1, 1. Для розбиття n-елементної множини на підмножини – відповідно 1, 63, 301, 350, 140, 21, 1. Уявна площина в першій послідовності походить по числу 4, а в другій – по числу 350. В останніх двох випадках маємо наближену симетрію.

Аксіоми знакових комбінаторних просторів

Виходячи з утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сфор-

мулюємо аксіоми, яким задовольняють знакові комбінаторні простори [1].

1. Знакові комбінаторні простори існують у двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).
2. Згорнутий простір задається інформаційним знаком $\Re = < A, T, R, \Xi >$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A – одна або кілька базових множин, з елементів $a_{l_j} \in A_l \subset A$, яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1,...,n\}$, $l \in \{1,...,\tilde{q}\}$, $\tilde{q}$ – кількість базових множин; T – тип знакового комбінаторного простору; R – правила розгортання знакового комбінаторного простору; Ξ – правила згортання знакового комбінаторного простору.
3. Утворення зі згорнутого розгорнутих знакових комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.
4. Згортання знакового комбінаторного простору певного типу проводиться з точок як одного, так і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся.

Зв’язок комбінаторики та біології

У літературі описано багато природних явищ, пов’язаних з комбінаторними числами, зокрема з числами Фібоначчі, «золотим» числом. При формуванні суцвіття деяких квітів, луски шишок, розміщенні листя дерев та інших рослин утворюються правильні спіралі, число рядів яких збігається з числами Фібоначчі, послідовність яких має вигляд: 1, 1, 2, 3 ,5, 8, 13, 21, 34, 55,…. При рості раковини деяких видів молюсків, рукава галактик, спіралі пелюстків троянди, що розпустилася, утворюють логарифмічну спіраль, що геометрично можна подати через «золотий прямокутник», в якого одна сторона довша в 1,618 разів («золоте» число або золотий перетин $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.6180339887$) [14, 15]. Це говорить про те, що живій та неживій природі властиві закони комбінаторики. В упорядкованих за певними правилами комбінаторних множинах числові послідовності, які задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, також утворюють комбінаторні числа, зокрема і числа Фібоначчі. При генеруванні множини розбиттів натурального числа або множини розбиттів n-елементної множини на підмножини з використанням властивості періодичності [8], одержані числові послідовності, що задають у них кількість комбінаторних конфігурацій, містять числа Фібоначчі. Наприклад, для розбиття натурального числа для $n = 8$ утворена скінченна послідовність, яка задає кількість розбиттів у їхній множині, має вигляд 1, 4, 5, 5, 3, 2, 1, 1, де останні п’ять цифр – числа Фібоначчі. Ця послідовність чисел характеризується наближеною симетрією.

Знакові біологічні простори. Виходячи з аксіом 1-4, насінину чи клітину розглянемо як згорнутий біологічний простір, який задамо інформаційним знаком $\Re = < A, T, R, \Xi >$, де A – одна або кілька базових множин, елементами яких мо-жуть бути амінокислоти або інші базові біологічні об’єкти, з яких утворюються розгорнуті біологічні простори, T – тип знакового біологічного простору, R – правила розгортання біологічного простору; Ξ – правила згортання простору заданого типу з точок як одного так і кількох просторів. Тобто, згорнутим біологічним простором назвемо інформаційний знак, який містить базові множини і систему правил, за допомогою яких комбінацією елементів цих множин розгортається живий організм**.** Під дією певних чинників (для рослин – це тепло, волога і земля) утворюється живий об’єкт – розгорнутий біологічний простір, який має здатність до згортання. Точкою знакового біологічного простору може бути як розбиття натурального числа, так і розбиття

n-елементної множини на підмножини або сполучення без повторень. Сукупність клітин назвемо частково розгорнутим біологічним простором. Ритмічні (пульсуючі) процеси в живій природі пов'язані з рекурентним способом утворення розгорнутих просторів. Знакові біологічні простори, як і комбінаторні, мають властивість із точок розгорнутого (одного або кількох однотипних) згортатися. Новий згорнутий простір має властивості тих просторів, з яких він утворений.

Таким чином, біологічним формам властиві закони знакових комбінаторних просторів та їхня динаміка утворення симетрії.

Моделювання динаміки розгортання знакових біологічних просторів з використанням комбінаторики

Під дією певних правил згорнутий біологічний простір починає розгортатися. Як відомо, клітини в живому організмі – тотожні і містять усі властивості згорнутого біологічного простору. Виходячи з цього, змоделюємо два варіанти розгортання знакового біологічного простору.

Перший варіант. При діленні клітини дублюються нові шляхом вибирання інформації з базової клітини. У цьому разі утворений простір подібний до простору сполучення без повторень, який утворює арифметичний трикутник (трикутник Паскаля). Якщо елементи арифметичного трикутника відобразити за допомогою таблиці, як описано у [14], то сума чисел по діагоналі цієї таблиці являє собою послідовність чисел Фібоначчі 1, 1, 1+1=2; 1+2=3; 1+3+1=5; 1+4+3=8; 1+5+6+1=13. Відповідно, цьому простору характерна строга симетрія.

Другий варіант. Одна клітина ділиться на дві частини, можливо однакові. У цьому разі проводиться перебір (частковий чи повний) елементів базової множини (амінокислот або інших базових біологічних об'єктів). Кожна утворена клітина повинна містити усю інформацію, яка знаходиться в базовій. Утворений простір аналогічний множині розбиття натурального числа. У процесі його розгортання також утворюються числа Фібоначчі. Утвореному знаковому біологічному простору за правилами розгортання простору розбиття натурального числа характерна наближена симетрія.

Оскільки комбінаторні множини різних типів мають різне впорядкування, то серед цих впорядкувань знайдуться як з точною, так і наближеною симетріями.

Висновки

Отже, множини комбінаторних конфігурацій упорядковуються багатьма способами та можуть бути як структурованими, так і неструктурованими, серед яких існують такі структуровані, які характеризуються симетрією як точною, так і наближеною.

Знакові біологічні простори, як і комбінаторні, існують у двох станах: спокою (згорнутий) та динаміки (розгорнутий), і розгортаються аналогічно знаковому комбінаторному. Їхніми точками є комбінаторні конфігурації різних типів.

З цього випливає, що для знакових біологічних просторів властиві закони комбінаторики. Оскільки для комбінаторних множин певного типу в процесі їхнього впорядкування утворюються комбінаторні числа та прослідковується динаміка утворення симетрії, то, досліджуючи її в комбінаториці, можна пояснити природу симетрії біологічних форм.

Література

1. Тимофієва, Н.К. (2015) Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект,* №1-2. С. 180–189.
2. Петухов, С.В. (1988) *Геометрии живой природы и алгоритмы самоорганизации*. М.: Знание, Серия «Математика кибернетика», (6).
3. Боднар, О.Я. (1994) *Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве*. Львов, «Свит».
4. Prabhu, V.V. (1993) Symmetry observations in long nucleotide sequences. *Nucleic Acids Res.* 21 (12). 2797–2800.
5. Волохонский, А.Г. (1971) Генетический код и симметрия. *Симметрия в природе*. Ленинград, 371-375.
6. Фрид, Э. (1979) *Элементарное введение в абстрактную алгебру*. Пер. с англ. М.: Мир.
7. Хоакин, Н. (2014) *Зазеркалье. Симметрия в математике. Мир математики в 40 т.* Пер. с англ. М.: Де Агостини, 17.
8. Тимофієва, Н.К. (2007) *Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної*

оптимізації. Автореф. дис... докт. техн. наук. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ.
9. Тимофеева, Н.К. (1998) Упорядочение множества значений аргумента целевой функции в комбинаторной оптимизации. *Кибернетика и систем. анализ*. (6), 78–88.
10. Эндрюс, Г. (1982) *Теория разбиений*. Пер. с англ. М.: Наука.
11. Липский, В. (1988). *Комбинаторика для программистов*. Пер. с польск. М.: Мир.
12. Рыбников, К.А. (1985) *Введение в комбинаторный анализ*. М.: Изд-во Москов. ун-та.
13. Тимофієва, Н.К. (2017) Про симетрію комбінаторних множин. *УСиМ*. (1), 3–16. DOI: 10.15407/usim.2017.01.003
14. Корбалан, Ф. (2014) *Золотое сечение. Математический язык красоты. Мир математики в 40 т.* Пер. с англ. М.: Де Агостини, 1.
15. Бейли, Н. (1970) *Математика в биологии и медицине*. Пер. с англ. М.: Мир.

References

1. Tymofijeva, N.K. (2015) Znakovi kombinatorni prostory ta shtuchy'j intelekt Shtuchny`j intelekt, №1-2. S. 180–189.
2. Petuxov, S.V. (1988) *Geometrii jivo'j prirody i algoritmy samoorganizathii*. M.: Znanije, Serija «Matematika kibernetika», (6).
3. Bodnar, O.Ja. (1994) *Zolotoe sethnije i neevklidova geometrija v prirode i iskusstve*. Lvov, «Svit».
4. Prabhu, V.V. (1993) Symmetry observations in long nucleotide sequences. *Nucleic Acids Res.* 21 (12). 2797–2800.
5. Voloxonski'j, A.G. (1971) Genetitheski'j kod i simmetrija. *Simmetrija v prirode*. Leningrad, 371–375.
6. Frid, E. (1979) *Elementarnoe vvedenie v abstraktnuju algebru* [per. z anhl.]. M.: Mir.
7. Xoakin, N. (2014). *Zazerkalje. Simmetrija v matematike*. *Mir матematiki v 40 t.* M.: De Agoctini, 17.
8. Tymofijeva, N.K. (2007) Teoretyko-thyslovi metody rozvjazannja zadath kombinatorno'j optymizatsiji. Avtoref. dys…dokt. texn. nauk, In-t kibernetyky im. V.M. Glushkova NAN Ukrajiny, Kyjiv.
9. Timofeeva, N.K. (1998) Uporjadothenie mnogestva znathenij argumenta thelevo'j funkthiji v kombinstorno'j optimizathiji. *Kibernetika i sistem. analiz.* (6). 78–88.
10. Endrus, G. (1982) *Teoryja razbienijn* [per. z anhl.]. – M.: Nauka.
11. Lipskij, V. (1988) *Kombinatorika dlja programistov* [per. z polsk.]. M. Mir.
12. Rybnikov, K.A. *(1985) Vvedenie* v *kombinatorny'j analiz.* M.: Izd-vo Moskov. un-та.
13. Tymofijeva, N.K. (2017) Pro symetriju kombinatornyx mnogyn. *USiM*. (1), 3–16. DOI: 10.15407/usim.2017.01.003
14. Korbalan, F. (2014) *Zolotoje sethenije. Matematitheski'j jazyk krasoty. Mir математiki V 40* [per. z anhl.]. M.: De Agoctini, (1).
15. Be'jli, N. (1970) *Matematika v biologiji i medithine*. [per. z anhl.]. M.: Mir.

RESUME

N.K. Tymofijeva

About the combinatorial numbers and symmetries in biology

In both living and inanimate nature there is symmetry, which is investigated in different ways. Typically, DNA symmetry (convolute significant biological spaces) is investigated using algebraic approaches. Deployed biological spaces are explored using geometry. But the question of how symmetry appears in deployed biological spaces has not yet been found.

In the literature is described many natural phenomena associated with combinatorial numbers, in particular the "golden" number transmitted by Fibonacci numbers. This suggests that the laws of combinatorics are inherent in nature. In ordered according to certain rules combinatorial sets, numerical sequences, which specify in them the number of combinatorial configurations, also form combinatorial numbers, including the Fibonacci numbers. Since combinatorial numbers are present in biology, the symmetry study using combinatorics is conducted in the article. In the process of ordering combinatorial sets, it is formed according to certain rules. The symmetry of these sets is modeled by a finite sequence of numbers, whose values increase to the largest of them, and then decrease (or decrease to the smallest, and then increase). The symmetry plane that passes through the largest (or least) sequence number divides it into two parts, whose values from the center evenly decrease (or increase), but these parts are not necessarily mirror symmetric. The study of combinatorial sets shows that they are characterized by both approximate and exact symmetry.

It is shown that the axioms of significant combinatorial spaces are inherent in significant biological spaces. With the use of these spaces, one can investigate how symmetries in biology (deployed biological space) are formed when developing a significant biological space from the convolute (DNA elements). Knowing the formation of symmetry in combinatorial sets, we can explain the formation of symmetry in biology.

Надійшла до редакції 17.10.2018